

**ФГБОУ ВПО «Петербургский государственный университет
путей сообщения»**

**Программа вступительного испытания по математике
для поступающих на бюджетную форму обучения**

Основные понятия

Арифметика, алгебра и начала анализа

Натуральные числа (**N**). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.

Признаки делимости на 2,3,5,9,10. Целые числа (**Z**). Рациональные числа, их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.

Действительные числа (**R**), их представление в виде десятичных дробей. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл и свойства. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.

Логарифмы, их свойства. Основное логарифмическое тождество.

Одночлен и многочлен. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена.

Понятие функции. Способы задания функции. Область определения Множество значений функций.

График функции. Периодичность, четность, нечетность.

Определение и основные свойства функций: линейной $y = kx + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), обратной пропорциональности $y = k/x$, арифметического корня $y = \sqrt{x}$, показательной $y = a^x$, $a > 0$, логарифмической $y = \log_a x$, $a > 0$, тригонометрических $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Уравнения. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

Неравенства. Решение неравенств. Понятие о равносильных неравенствах.

Системы уравнений и неравенств. Решение систем.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n -го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n -го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Тригонометрия

Формулы приведения. Соотношение между тригонометрическими функциями одного аргумента. Тригонометрические уравнения

Теорема синусов. Теорема косинусов.

Геометрия.

Прямая, луч, отрезок, ломаная. Длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые. Признаки параллельности 2-х прямых.

Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота, их свойства. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус, касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор. Центральные и вписанные углы. Углы с вершинами внутри и вне круга. Их измерение. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами.

Формулы площади треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

Длина окружности, длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

Правильные вписанные и описанные многоугольники. Выражение сторон правильных многоугольников через радиусы вписанной и описанной окружностей.

Подобие. Подобные многоугольники. Отношение периметров и площадей подобных многоугольников.

Основные формулы и теоремы

Алгебра и начала анализа

Свойства и графики функций $y = kx + b$, $y = k / x$, $y = ax^2 + bx + c$

Свойства корней квадратного трехчлена. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

Свойства числовых неравенств.

Логарифм произведения, степени, частного.

Тригонометрия

Определение, свойства и графики функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$,

$y = \operatorname{ctg} x$.

Формулы приведения.

Синус и косинус суммы и разности двух аргументов.

Преобразование сумм синусов и сумм косинусов в произведения.

Тригонометрические функции двойного аргумента.

Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

Геометрия

Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

Расстояние между двумя точками плоскости.

Признаки равенства и подобия треугольников.

Сумма внешних и внутренних углов выпуклого многоугольника.

Решение треугольников (Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов.)

Признаки параллелограмма, ромба, трапеции, их свойства.

Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Касательная к окружности и ее свойства. Величина угла, вписанного в окружность. Уравнение окружности.

ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ

Вариант № 1

1. Вычислите $(4 + \sqrt{2})^2 + \frac{8}{1 - \sqrt{2}}$;
2. Число сотрудников института ежегодно сокращается на один и тот же процент. Определите первоначальное число сотрудников если после первого сокращения их стало 480 человек, а после второго – 360 человек.
3. Решите неравенство $|2 - 5x| + |x + 1| \geq x + 3$;
4. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x + 3} - \sqrt[3]{2x + 1} = 2$;
5. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4-x}{x-5}} < 3^{\frac{1}{x-1}}$;
6. Решите уравнение $\log_2(3 \cdot 2^x + 4) = 6 - x$;
7. Вычислите $\sin 15^\circ$;
8. Решите уравнение $2 \sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$;
9. Пятый член возрастающей геометрической прогрессии с положительными членами на 9 больше ее третьего члена, а произведение этих членов равно 36. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии
10. Касательная к окружности параллельна хорде. Найдите радиус окружности, если известно, что длина хорды равна 6 см, а расстояние от точки касания до одного из концов хорды равно 5 см.

Вариант № 2

1. Упростите выражение $\left(\frac{\left(x + \sqrt[3]{2ax^2} \right) \left(2a + \sqrt[3]{4a^2x} \right)^{-1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - (2a)^{-\frac{1}{3}} \right)^{-6}$
2. Определите сумму вклада, помещенного в банк под фиксированный годовой процент, если за первый год она увеличилась на 100 тыс. руб., а к концу второго года составила 720 тыс. руб.
3. Решите неравенство $\frac{2}{x+8} < \frac{2x-1}{x^2-1}$;
4. Решите уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$;
5. Решите уравнение $|-x + |2x + 5|| = 3$;
6. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;
7. Вычислите $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$;
8. Решите уравнение $4\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x = 3$;
9. Найдите три числа, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, если сумма равна 65 и известно, что после вычитания 1 из первого числа и 19 из третьего, полученные числа составляют арифметическую прогрессию.
10. В треугольник со сторонами 10 см, 17 см и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$;
2. Курс рубля относительно доллара вырос на 11 %, а относительно евро понизился на 7 %. Найдите, в процентах, как изменился курс евро к доллару.
3. Решите неравенство $8^{\frac{2x^2+1}{x}} \leq 0,5 \cdot 4^{3x}$;

4. Решите неравенство $\sqrt{2x + 3} \leq x$;
5. Найдите все значения параметра α , при которых квадратный трехчлен $y = (-2\alpha - 2)x^2 + (-\alpha - 1)x - \alpha + 1$ имеет корни различных знаков и положительный корень меньше модуля отрицательного корня.
6. Решите уравнение $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - \frac{1}{2} = 0$;
7. Вычислите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = -0,28$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;
8. Решите уравнение $\cos 5x - \cos 3x + \sin 2x = 0$;
9. Сумма третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равна 7, а отношение пятого члена к первому равно (-2).
Найдите сумму первых шести членов прогрессии.
10. Основания трапеции равны 4 см и 16 см. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Программа вступительных испытаний по математике для поступающих на договорную форму обучения

Вступительные испытания по математике проводятся в форме тестирования по основным разделам школьного курса математики – алгебре, геометрии, тригонометрии, началам анализа и включают задачи по темам:

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.
2. Квадратное уравнение. Теорема Виета.
3. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства.
4. Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств;
задачи вычислительного характера, содержащие показательную и логарифмическую функции.
5. Доказательство тригонометрических тождеств, решение тригонометрических уравнений, тригонометрические задачи вычислительного характера.

6. Решение геометрических задач (планиметрия).
7. Задачи на нахождение области определения функций.
8. Основные свойства графиков и простейших функций.